

- ¹ For simplicity we shall not only the 1-dimensional case.
- ² O. Hinze, Turbulent fluid and particle interaction, in: Program in Heat and Mass Transfer **6**, 433 [1972], G. Hetsroni ed., Pergamon Press, Oxford and New York 1972.
- ³ In a subsequent paper.
- ⁴ H. Cramér and M. R. Leadbetter, Stationary and Related Stochastic Processes, John Wiley, New York 1967.
- ⁵ A. S. Monini and A. M. Yaglom, Statistical Fluid Mechanics, Vol. 1, MIT-press 1971.
- ⁶ To be published.
- ⁷ K. Elsässer and P. Gräff, Ann. Physics **68**, 305 [1971].
- ⁸ Compare: P. Gräff, Lett. Nuov. Cim. **2**, 611 [1971].
- ⁹ M. Bixon and R. Zwanzig, J. Stat. Phys. **3**, 245 [1971].
- ¹⁰ P. G. Saffman, Phys. Fluids **12**, 1786 [1969].
- ¹¹ R. Phythian, J. Fluid Mech. **53**, 469 [1972].
- ¹² R. C. Bourret, Canad. J. Phys. **43**, 619 [1965].
- ¹³ Only half a δ -function contributes to the integral in Equ. (46). Compare C. E. Leith, J. Atm. Sci. **28**, 145 [1971], App. f. The agreement with Brownian motion is evident.
- ¹⁴ R. C. Bourret, Canad. J. Phys. **38**, 665 [1960].

MPD-Ringkanalströmungen in gekreuzten Fremdfeldern für willkürliche Hall-Parameter

K. Robert

DFVLR-Institut für Angewandte Gasdynamik, Porz-Wahn

(Z. Naturforsch. **28a**, 1108–1113 [1973]; eingegangen am 19. März 1973)

MPD Annular Duct Flow in a Crossed-Field Device for Arbitrary Values of the Hall Parameter

The steady, supersonic, barotropic, and inviscid flow of a rarefied gas plasma through an axisymmetric crossed-field device (imposed axial electric field and radial magnetic induction) is being analyzed, for arbitrary values of the Hall parameter. A previously developed perturbation method is used to obtain closed form solutions for the electric current density, flow velocity, and mass density within the annular duct. Conditions for optimal values of the Hall parameter are given.

1. Einleitung

In Fortsetzung einer früheren Arbeit¹ über Freistrahl- und Rohrströmungen eines verdünnten barotropen Gasplasmas im „gestreckten“ Fremdmagnetfeld mit axialem elektrischem Feld bei schwachem Hall-Effekt wird im folgenden die durch *gekreuzte* Fremdfelder beeinflußte Ringkanalströmung für *beliebige* Werte des Elektronen-Hall-Parameters ψ theoretisch untersucht. Bei derartigen axialsymmetrischen Anordnungen bedient man sich i. allg. eines Topfkernmagneten zur Erzeugung der (im Idealfall) rein radialen fremdmagnetischen Induktion

$$\hat{\mathbf{B}}^{00} = \hat{B}_r^{00}(\hat{r}) \mathbf{e}_r^*.$$

Solche ringförmigen Hall-Beschleuniger dürften bei der Entwicklung von Raumfahrttriebwerken² (z. B. für Lageregelungssysteme) von Interesse sein.

Zwecks Straffung der Darstellung wird eine weitestmögliche Anlehnung an Verfahrensweisen und Bezeichnungen von¹ angestrebt. So wird unter der Annahme kleiner magnetischer Reynolds- und Druckzahlen (verglichen mit Eins) wieder die dort dargestellte Linearisierungsmethode für die dimensionslos gemachten Grundgleichungen der Magnetogasdynamik verwendet. Im übrigen sei für eine ausführlichere Darstellung auf den Bericht³ verwiesen.

2. Problemstellung und Grundgleichungen

Es wird die stationäre und reibungsfreie Strömung eines barotropen Lichtbogenplasmas in der in Abb. 1 schematisch dargestellten ringförmigen und axial-symmetrischen Anordnung (Innenradius \hat{r}_0 , Außenradius \hat{R}) untersucht. Die Mantelrohre seien nichtleitend und unmagnetisch. Zwischen den beiden im Abstand \hat{L} befindlichen – angenähert etwa durch Drahtnetze realisierbaren – Äquipotentialflächen bestehe die Potentialdifferenz \hat{V} . Die Überschall-Einlaufgeschwindigkeit $\hat{\mathbf{v}}^{00}\{0, 0, \hat{v}_z^{00}\}$, $\hat{v}_z^{00} = \text{const}$, im Querschnitt $\hat{z} = 0$ wird vorgegeben, ebenso die Dichte $\hat{\rho}^{00} = \text{const}$ dort. Gesucht sind elektrische Stromdichte $\hat{\mathbf{j}}$, Strömungsgeschwindigkeit $\hat{\mathbf{v}}$ und Massendichte $\hat{\rho}$ des Plasmas im Ringraum

$$\hat{r}_0 \leqq \hat{r} \leqq \hat{R}.$$

Sämtliche Materialkoeffizienten werden konstant angenommen. Im verallgemeinerten Ohmschen Gesetz werden der Ionenschlupf sowie der Gradient des Elektronengaspartialdruckes vernachlässigt. Ausgangspunkt für die Untersuchungen bilden die in¹

Sonderdruckanforderungen an Priv.-Doz. Dr. K. Robert, DFVLR-Institut für Angewandte Gasdynamik, D-5050 Porz-Wahn, Linder Höhe.

* ^ kennzeichnet dimensionsbehaftete Größen.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

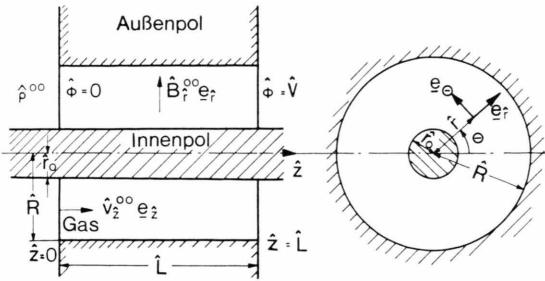


Abb. 1. Schematische Darstellung der Ringkanalanordnung.

angegebenen dimensionslosen magnetogasdynamischen Grundgleichungen (8) – (12) und (18) mit den Parametern (15) – (17).

Die Bedeutung der – stets positiven – dimensionslosen Kennzahlen ψ , M , S und R_m ist unverändert gegenüber¹. Während jedoch die magnetische Druckzahl S und die magnetische Reynolds-Zahl R_m wiederum klein gegen Eins angenommen werden, sind die Anström-Mach-Zahl $M > 1$ und – abweichend von¹ auch – der Hall-Parameter ψ hier beliebig wählbar.

Die axialsymmetrische – notwendig quellen- und wirbelfreie – fremdmagnetische Induktion \mathbf{B}^{00} soll im Ringbereich verabredungsgemäß nur eine Radialkomponente B_r^{00} besitzen. Sie wird durch den Vektor

$$\hat{\mathbf{B}}^{00}/\hat{B}_0 = \mathbf{B}^{00} = \{c r_0/r, 0, 0\}, \quad -1 \leq c \leq 1, \quad (1)$$

festgelegt, dessen maximaler Betrag $|\mathbf{B}^{00}| = 1$ an der Innenwand des Ringbereiches angenommen wird und der für $c > 0$ (< 0) nach außen (innen) weist³.

Auf Grund der geometrischen und physikalischen Voraussetzungen liegt ein axialsymmetrisches Problem vor.

Die Linearisierung der Grundgleichungen erfolgt wieder durch Entwicklung der unbekannten Feldgrößen in Doppelreihen nach den Parametern R_m und S :

$$U = U^{00} + R_m U^{01} + S U^{10} + R_m^2 U^{001} + R_m S U^{010} + S^2 U^{100} + \dots, \quad (2)$$

$$U = \varrho, \mathbf{v}, \mathbf{B}, \mathbf{j}, \Phi$$

und anschließenden Koeffizientenvergleich¹.

Von den durch magnetogasdynamische Wechselwirkungen ungestörten Lösungen für den Grundzustand (mit $R_m = S = 0$) :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{00} = \{0, 0, 1\}, \quad (3)$$

$$\varrho = \varrho^{00} = 1 \quad (4)$$

abweichende Ergebnisse werden erst dann erhalten, wenn die Lorentz-Kraft im Impulssatz Berücksichtigung findet. Dazu müssen mindestens noch die Glieder in $R_m S$ mitgenommen werden. Es folgt dann:

$$W^{01} = W^{10} = W^{001} = W^{100} = 0, \quad W = \varrho, \mathbf{v}. \quad (5)$$

Beschränkt man sich auf eine Störungsrechnung erster Ordnung in ϱ und \mathbf{v} , so ergibt sich weiter aus dem Koeffizientenvergleich für die Störgrößen ϱ^{010} und \mathbf{v}^{010} :

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}^{010} + \varrho^{010} \mathbf{v}^{00}) = 0, \quad (6)$$

$$(\mathbf{v}^{00} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{010} + (1/M^2) \nabla \varrho^{010} = \mathbf{j}^{00} \times \mathbf{B}^{00}, \quad (7)$$

wobei \mathbf{j}^{00} aus dem verallgemeinerten Ohmschen Gesetz für den Grundzustand

$$\mathbf{j}^{00} = [1/(1 + \psi^2 B^{00^2})] \{ -\nabla \Phi^{00} + \mathbf{v}^{00} \times \mathbf{B}^{00} + \psi [\nabla \Phi^{00} - \mathbf{v}^{00} \times \mathbf{B}^{00}] \times \mathbf{B}^{00} - \psi^2 (\nabla \Phi^{00} \cdot \mathbf{B}^{00}) \mathbf{B}^{00} \} \quad (8)$$

zu ermitteln ist.

3. Elektrische Stromdichte

Zunächst wird das elektrische Potential Φ^{00} für den Grundzustand berechnet. Dazu setzen wir (8) in

$$\nabla \cdot \mathbf{j}^{00} = 0 \quad (9)$$

ein und erhalten unter Verwendung von (1), (3) und (4) die folgende elliptische Differentialgleichung:

$$[1 + (\psi c r_0/r)^2] (\Phi_{rr}^{00} + (1/r) \Phi_{|r}^{00}) + \Phi_{zz}^{00} = 0. \quad (10)$$

(Hier und im folgenden wird die abkürzende Schreibweise $W_{|xy} \equiv \partial^2 W / \partial x \partial y$ verwendet.)

Für verschwindenden Hall-Effekt ist (10) die Laplacesche Differentialgleichung.

Die Begrenzungsflächen $z = 0$ und $z = L$ sind voraussetzungsgemäß im Bereich $r_0 \leq r \leq 1$ Äquipotentialflächen. Da zwischen ihnen die Potentialdifferenz $V = \hat{V}/(\hat{v}_z^{00} \hat{B}_0 \hat{R})$ bestehen soll, kann o. E. d. A. gesetzt werden:

$$\Phi^{00}(r, 0) = 0, \quad (11)$$

$$\Phi^{00}(r, L) = V \quad \text{für} \quad r_0 \leq r \leq 1. \quad (12)$$

Auf den Mantelflächen $r = r_0$ und $r = 1$ muß die Radialkomponente der elektrischen Stromdichte j_r^{00} verschwinden. Dies führt zu den restlichen Randbedingungen

$$\Phi_{|r}^{00}(r_0, z) = 0, \quad (13)$$

$$\Phi_{|r}^{00}(1, z) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq z \leq L. \quad (14)$$

Man stellt fest, daß eine die Randbedingungen (11) bis (14) befriedigende Lösung von Gl. (10) nicht von r abhängen kann, so daß sich

$$\Phi^{00} = \Phi^{00}(z) = z V/L \quad (15)$$

ergibt.

Setzt man nun (1), (3) und (15) in das Ohmsche Gesetz (8) ein, so erhält man für die Komponenten der elektrischen Stromdichte im Grundzustand die folgenden von der Axialkoordinate z unabhängigen Ausdrücke:

$$j_r^{00} = 0, \quad (16)$$

$$j_\theta^{00} = c r_0 (1 + \psi V/L) r / (r^2 + \psi^2 c^2 r_0^2), \quad (17)$$

$$j_z^{00} = (-V/L + \psi c^2 r_0^2 / r^2) r^2 / (r^2 + \psi^2 c^2 r_0^2). \quad (18)$$

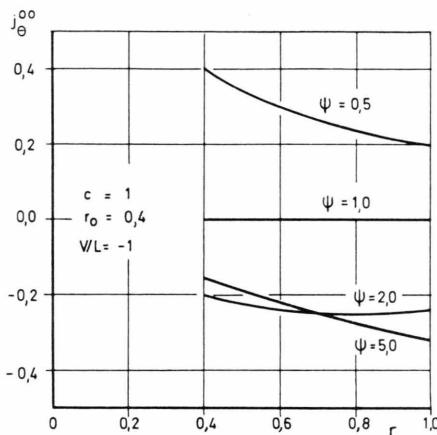


Abb. 2. Radialabhängigkeit der Azimutalkomponente der elektrischen Stromdichte.

Abbildung 2 vermittelt – für einen typischen Fall – einen Überblick der r -Abhängigkeit von j_θ^{00} . Diese Funktion besitzt für $\{c \geq 0\}$ an der Stelle $r = \psi |c| r_0$ ein $\{\text{Maximum}\}$ (bzw. $\{\text{Minimum}\}$)

$$j_\theta^{00}(\psi |c| r_0) = \text{sign}(c) [(1 + \psi V/L)/2 \psi] \quad \text{für } V > -L/\psi \quad (\text{bzw. } V < -L/\psi);$$

die Extremwerte können sowohl innerhalb als auch außerhalb des allein interessierenden Bereichs $r_0 \leq r \leq 1$ liegen.

j_z^{00} ist eine für $V > -L/\psi$ ($V < -L/\psi$) monoton fallende (steigende) Funktion von r , derart daß

$$j_z^{00} \leq 0 \text{ für } r \geq |c| r_0 \sqrt{\psi L/V}.$$

$$\text{Für } V < 0 \text{ gilt stets: } j_z^{00} > 0.$$

Während das Vorzeichen der Azimutalkomponente j_θ^{00} auch von der durch c definierten Richtung der Induktion \mathbf{B}^{00} abhängt, ist die Axialkomponente j_z^{00} hiervom unabhängig, denn in (18) geht nur c^2 ein.

4. Lösung der Bewegungsgleichungen

Durch Einsetzen von (1), (17) und (18) in (6) und (7) ergibt sich für die Bewegungsgleichungen in Komponentenschreibweise:

$$v_{rr}^{010} + (1/r) v_r^{010} + v_{zz}^{010} + \varrho_z^{010} = 0, \quad (19)$$

$$v_{rz}^{010} + (1/M^2) \varrho_r^{010} = 0, \quad (20)$$

$$v_{\theta z}^{010} = (-V/L + \psi c^2 r_0^2 / r^2) c r_0 r / (r^2 + \psi^2 c^2 r_0^2), \quad (21)$$

$$v_{zz}^{010} + (1/M^2) \varrho_z^{010} = - (1 + \psi V/L) c^2 r_0^2 / (r^2 + \psi^2 c^2 r_0^2). \quad (22)$$

Die Differentialgleichung (21) für die Azimutalkomponente der Störgeschwindigkeit v_θ^{010} kann unmittelbar integriert werden. Dies liefert bei Berücksichtigung der Anfangsbedingung $v_\theta^{010}(r, 0) = 0$:

$$v_\theta^{010}(r, z) = (-V/L + \psi c^2 r_0^2 / r^2) c r_0 r z / (r^2 + \psi^2 c^2 r_0^2). \quad (23)$$

Der in z lineare Ausdruck für v_θ^{010} setzt sich i. allg. additiv aus zwei Anteilen zusammen, von denen nur der eine von der Potentialdifferenz V abhängt, und verschwindet bei verschwindendem Fremdmagnetfeld ($c = 0$). Im folgenden sei $c > 0$ vorausgesetzt, die Überlegungen für $c < 0$ erfolgen analog. Für $V \leq 0$ ist v_θ^{010} dann in $0 < z \leq L$ positiv für alle r ; wählt man dagegen $V > 0$, so erfährt v_θ^{010} an der Stelle $r_u = c r_0 \sqrt{\psi L/V}$ eine Vorzeichenumkehr, wobei jedoch nur dann $r_0 < r_u < 1$ gilt, wenn noch die Ungleichung $1 < c \sqrt{\psi L/V} < 1/r_0$ erfüllt ist. Im letzteren Fall rotieren also die äußeren Plasmaschichten an jeder Stelle $0 < z \leq L$ mit umgekehrtem Drehsinn wie die inneren, siehe Abbildung 3. Auch bei verschwindendem Hall-Effekt existiert für endliche Werte von V (und c) eine mit wachsendem r nunmehr monoton steigende bzw. abnehmende Umfangsgeschwindigkeit, je nachdem ob V negativ oder positiv ist.

Zu bemerken bleibt noch, daß auch hier wieder v_θ^{010} – im Gegensatz zu den restlichen Störgrößen v_r^{010} , v_z^{010} und ϱ_z^{010} , s. u. – von der Anström-Mach-Zahl M unabhängig ist^{1, 4}.

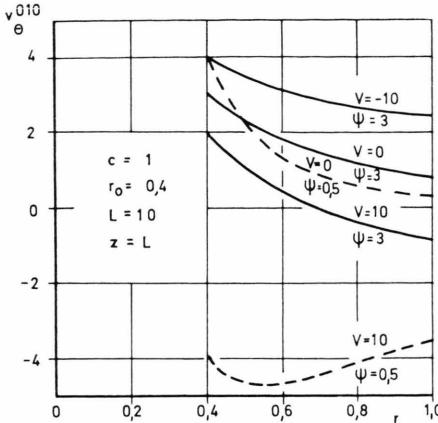


Abb. 3. Radialabhängigkeit der Azimutalkomponente der Störgeschwindigkeit.

Zur Ermittlung der eben genannten drei Störgrößen löst man das Gleichungssystem (19), (20) und (22) nach der Radialkomponente der Störgeschwindigkeit v_r^{010} auf, wobei hier die folgenden Anfangsbedingungen zu berücksichtigen sind:

$$v_r^{010}(r, 0) = 0, \quad (24)$$

$$v_z^{010}(r, 0) = 0, \quad (25)$$

$$\varrho^{010}(r, 0) = 0, \quad \text{für } r_0 \leqq r \leqq 1. \quad (26)$$

Man erhält dann³:

$$\begin{aligned} v_{rrr}^{010} + (1/r) v_{rr}^{010} - (1/r^2) v_r^{010} - (M^2 - 1) v_{rzz}^{010} \\ = -2(1 + \psi V/L) c^2 r_0^2 r / (r^2 + \psi^2 c^2 r_0^2)^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Die lineare partielle Differentialgleichung (27) ist vom hyperbolischen, parabolischen bzw. elliptischen Typ, je nachdem ob die Mach-Zahl M größer, gleich bzw. kleiner als Eins ist. Wir behandeln hier nur den Fall $M > 1$. Um die Gl. (27) eindeutig lösen zu können, werden noch zwei Randbedingungen für v_r^{010} benötigt; wegen der Undurchdringbarkeit der Mantelflächen lauten diese wie folgt:

Unter Verwendung von Gl. (30) erhält man bei Berücksichtigung der entsprechenden Randbedingungen für die Axialkomponente der Störgeschwindigkeit³

$$v_r^{010}(r, z) = -\frac{\delta^2 + 1}{\delta^2} \left(1 + \psi \frac{V}{L} \right) \frac{c^2 r_0^2 z}{r^2 + \psi^2 c^2 r_0^2} + \frac{1}{\delta^2} \sum_{\mu} \frac{\varphi_{\mu}}{\lambda_{\mu}} \left(\frac{\delta}{\lambda_{\mu}} \sin \frac{\lambda_{\mu}}{\delta} z - z \right) \left[J_0(\lambda_{\mu} r) - \frac{J_1(\lambda_{\mu})}{Y_1(\lambda_{\mu})} Y_0(\lambda_{\mu} r) \right] \quad (33)$$

und für die Stördichte³

$$\varrho^{010}(r, z) = \frac{\delta^2 + 1}{\delta^2} \left\{ \left(1 + \psi \frac{V}{L} \right) \frac{c^2 r_0^2 z}{r^2 + \psi^2 c^2 r_0^2} - \sum_{\mu} \frac{\varphi_{\mu}}{\lambda_{\mu}} \left(\frac{\delta}{\lambda_{\mu}} \sin \frac{\lambda_{\mu}}{\delta} z - z \right) \left[J_0(\lambda_{\mu} r) - \frac{J_1(\lambda_{\mu})}{Y_1(\lambda_{\mu})} Y_0(\lambda_{\mu} r) \right] \right\}. \quad (34)$$

$$v_r^{010}(r_0, z) = 0, \quad (28)$$

$$v_r^{010}(1, z) = 0, \quad \text{für } 0 \leqq z \leqq L. \quad (29)$$

Mit Hilfe des Eigenfunktionenverfahrens⁵ gewinnt man nach längerer Rechnung³ als den Randbedingungen angepaßte Lösung der Differentialgleichung (27):

$$v_r^{010}(r, z) = -2 \sum_{\mu} \left[\frac{\varphi_{\mu}}{\lambda_{\mu}^2} \sin^2 \frac{\lambda_{\mu}}{2\delta} z \right] R_{\mu}(r), \quad \mu = 1, 2, \dots, \quad (30)$$

wobei $\delta = \sqrt{M^2 - 1}$

Die Eigenwerte λ_{μ} , $\mu = 1, 2, \dots$, genügen der Säkulargleichung

$$J_1(\lambda r_0) Y_1(\lambda) - J_1(\lambda) Y_1(\lambda r_0) = 0, \quad (31)$$

worin J_1 und Y_1 die Besselsche bzw. Neumannsche Funktion 1. Ordnung sind. Die Zylinderfunktionen

$$R_{\mu}(r) \equiv J_1(\lambda_{\mu} r) - [J_1(\lambda_{\mu})/Y_1(\lambda_{\mu})] Y_1(\lambda_{\mu} r)$$

genügen der Orthogonalitätsrelation

$$\int_{r_0}^1 r R_{\mu}(r) R_{\nu}(r) dr = N_{\mu}^2 \delta_{\mu\nu},$$

wobei $\delta_{\mu\nu}$ das Kronecker-Symbol bedeutet und das Quadrat der Normierungskonstanten N_{μ} sich wie folgt ergibt:

$$N_{\mu}^2 = \frac{2}{\pi^2 \lambda_{\mu}^2} \left[\frac{1}{Y_1^2(\lambda_{\mu})} - \frac{1}{Y_1^2(\lambda_{\mu} r_0)} \right].$$

Für die Konstanten φ_{μ} gilt

$$\varphi_{\mu} = -2(1 + \psi V/L) c^2 r_0^2 A_{\mu} / N_{\mu}^2, \quad (32)$$

wobei A_{μ} Abkürzung für das folgende nicht elementar lösbare Integral ist:

$$A_{\mu} = \int_{r_0}^1 \frac{r^2 R_{\mu}(r)}{(r^2 + \psi^2 c^2 r_0^2)^2} dr.$$

5. Diskussion der Ergebnisse

Wir befassen uns hier nur noch mit den Störgrößen v_r^{010} , v_z^{010} und ϱ^{010} . Diese verschwinden sämtlich für $c=0$ (kein Fremdmagnetfeld). Bemerkenswert ist ferner die Tatsache, daß in ihnen die Axialkomponente der elektrischen Feldstärke V/L nur multiplikativ gekoppelt mit dem Hall-Parameter ψ auftritt. Bei verschwindendem Hall-Effekt sind also in unserer Näherung die genannten Störungen von der Spannung V unabhängig und hängen nur noch vom äußeren Magnetfeld \mathbf{B}^{00} ab.

Für $V = -L/\psi$ verschwinden mit j_θ^{00} die Störungen v_r^{010} , v_z^{010} und ϱ^{010} identisch, nicht jedoch v_θ^{010} , das von j_z^{00} abhängt. Für positive Werte von V werden also v_r^{010} , v_z^{010} und ϱ^{010} bei Änderung allein von ψ im allg. ihr Vorzeichen nicht wechseln.

Kehrt man die Richtung der radialen fremdmagnetischen Induktion \mathbf{B}^{00} um ($c \rightarrow -c$), so bleibt dies ohne Einfluß auf die genannten drei Störungen, da in ihnen nur c^2 auftritt. Dies ist physikalisch einleuchtend, denn – gemäß (1) und (17) – wechselt mit B_r^{00} auch j_θ^{00} sein Vorzeichen.

Weitere Informationen können nur aus einer numerischen Analyse der Lösungen (30), (33) und (34) gewonnen werden. Diese wurde für Parameterwerte in den typischen Bereichen $0,2 \leq r_0 \leq 0,8$; $0 \leq \psi \leq 1000^*$; $-1 \leq V/L \leq 1$; $-1 \leq c \leq 1$; $1,1 \leq M \leq 20$ durchgeführt.

$v_r^{010}(z)$ zeigt generell für $r_0 < r < 1$ den in Abb. 4 für $r_0 = 0,4$; $M = 2,0$ und $\psi = 0,0$ bzw. $2,5$ darge-

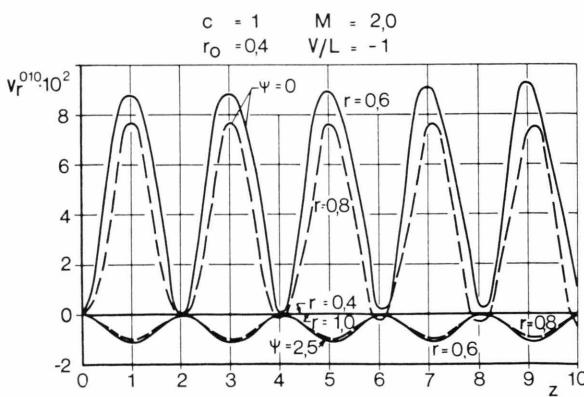


Abb. 4. Radialkomponente der Störgeschwindigkeit bei Überschallanströmung.

* Nicht erörtert wird hier die Problematik, die in der Verwendung des Einflüssigkeitsmodells für derartig hohe Werte des Hall-Parameters liegt.

stellten quasi-periodischen Verlauf. Die „Wellenlänge“ Λ erhält man – bei Vernachlässigung der Summanden höherer als erster Ordnung in (30) – aus der Beziehung

$$\Lambda = 2\pi \sqrt{M^2 - 1/\lambda_1}, \quad (35)$$

wobei λ_1 die erste Wurzel der Säkulargleichung (31) bedeutet. Λ hängt also nur von der Mach-Zahl M und vom Innenradius r_0 ab. Die Beträge der Extremwerte von $v_r^{010}(z)$ sind – gemäß (30) – von M unabhängig, sinken jedoch etwas für wachsende r_0 und vor allem auf Grund von (32) kontinuierlich bei steigenden Werten von ψ . Der Hall-Effekt hat also u. a. die für die praktische Anwendung in Beschleunigungsgeräten interessante Wirkung, die im allgemeinen störenden durch das Fremdmagnetfeld hervorgerufenen Radialgeschwindigkeiten weitgehend zu reduzieren.

Aus (33) ist ersichtlich, daß v_z^{010} sich additiv aus zwei Anteilen zusammensetzt: einem summenfreien, in z linearen und r^2 umgekehrt proportionalen Anteil $-\zeta$ sowie einem quasi-periodischen Summenterm η , der etwa von der gleichen Größenordnung wie v_r^{010} und dessen „Wellenlänge“ Λ ebenfalls durch (35) gegeben ist:

$$v_z^{010} = -\zeta + \eta.$$

Für festes r stellt sich $v_z^{010}(z)$ somit als eine Gerade $-\zeta(z)$ durch den Ursprung dar, der (im Vergleich zu $|\zeta(L)|$) betragsmäßig sehr kleine quasi-periodische Schwankungen $\eta(z)$ überlagert sind, s. Abb. 5. (In den hier dargestellten typischen Fällen ist mit

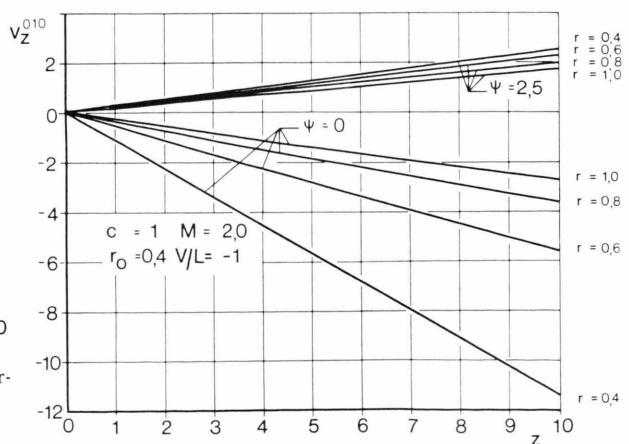


Abb. 5. Axialkomponente der Störgeschwindigkeit bei Überschallanströmung.

dem verwendeten Maßstab η zeichnerisch nicht zu erfassen.)

Ähnlich ist die Situation für die Stördichte ϱ^{010} , die gemäß (33) und (34) wie folgt geschrieben werden kann:

$$\varrho^{010} = +\zeta - M^2 \eta.$$

Wegen $M^2 > 1$ ist hier jedoch der Schwankungsanteil relativ größer als für v_z^{010} .

Zur Untersuchung der für das Problem bedeutsamen funktionalen Zusammenhänge zwischen den Störungen v_z^{010} bzw. ϱ^{010} und den Parametern r_0 , M und ψ genügt es, die entsprechenden Überlegungen allein auf den wesentlichen Anteil ζ zu beschränken, wodurch die Diskussion erheblich erleichtert und übersichtlicher wird.

Man stellt fest, daß ζ eine monoton zu- bzw. abnehmende Funktion von r_0 ist, je nachdem ob V/L größer oder kleiner als $-1/\psi$ ist; für $V/L = -1/\psi$ verschwinden ζ und η identisch.

Weiter ergibt sich, daß ζ monoton mit der Anström-Mach-Zahl M steigt bzw. fällt, je nachdem ob V/L kleiner oder größer als $-1/\psi$ ist.

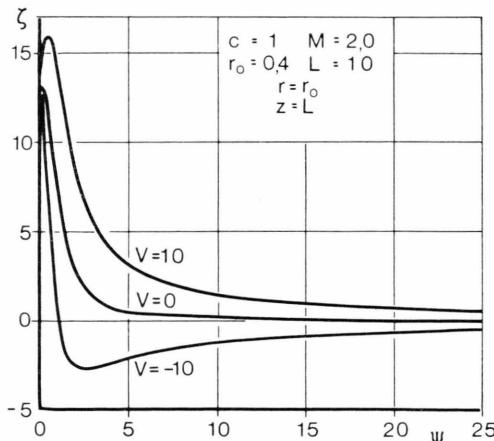


Abb. 6. ζ in Abhängigkeit vom Hall-Parameter ψ .

Etwas verwickelter ist die ψ -Abhängigkeit von ζ , die in Abb. 6 für $V/L = -1, 0, 1$ bei im übrigen gleichen Parameterwerten dargestellt wird. Die Funk-

tion $\zeta(\psi)$ besitzt – für $\psi > 0$ – nur einen Extremwert an der Stelle

$$\psi_m = -L/V + \sqrt{(L/V)^2 + (r/c r_0)^2}, \quad V \neq 0.$$

Für $V > 0$ handelt es sich dabei um ein Maximum, bei $V < 0$ liegt ein Minimum vor; für $V = 0$ verläuft $\zeta(\psi)$ monoton fallend. Da $r_0 \leqq r \leqq 1$ sein muß, gilt:

$$-\frac{L}{V} + \sqrt{\left(\frac{L}{V}\right)^2 + \frac{1}{c^2}} \leqq \psi_m \leqq -\frac{L}{V} + \sqrt{\left(\frac{L}{V}\right)^2 + \frac{1}{(c r_0)^2}}.$$

An dieser Stelle sei noch auf folgenden scheinbaren Widerspruch hingewiesen. Hielte man sich uneingeschränkt an die gelegentlich verwendete „makroskopische“ Definition des Hall-Parameters als einem Maß für das Verhältnis zwischen Hall- und Axialstrom⁶, so müßte man eigentlich die Höchstwerte von $|j_\theta^{00}|$ und somit $|v_z^{010}|$ und $|\varrho^{010}|$ (bzw. $|\zeta|$) für $\psi = \infty$ erwarten. Daß dies hier nicht der Fall ist, die fraglichen Extremwerte vielmehr an der Stelle ψ_m liegen und die erwähnten Störungen für $\psi \rightarrow \infty$ sogar asymptotisch verschwinden, ist darauf zurückzuführen, daß im verallgemeinerten Ohmschen Gesetz (8) der Term mit dem Faktor ψ^2 innerhalb $\{ \}$ – wegen $\nabla \Phi^{00} = (V/L) \mathbf{e}_z \perp \mathbf{B}^{00}$ – verschwindet. Diese Zwischenbemerkung als Hinweis darauf, daß bei Größenordnungsabschätzungen auch der Vektorcharakter der fraglichen Feldgrößen zu berücksichtigen ist.

Schließlich sei noch auf den folgenden – für etwaige Anwendungen interessanten – vom Hall-Parameter abhängigen Effekt hingewiesen. Die $v_z^{010}(r)$ - und $\varrho^{010}(r)$ - [bzw. $\zeta(r)$ -]Profile an einer festen Stelle z sind um so homogener, d. h. um so weniger von r abhängig, je größer ψ ist (s. Abbildung 5). Denn je größer ψ ist, um so weniger fällt $r^2 \leqq 1$ gegenüber $\psi^2 c^2 r_0^2$ ($c \neq 0$) im Nenner von ζ ins Gewicht, siehe Gleichung (33).

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft sei für finanzielle Unterstützung gedankt.

⁵ R. Courant u. D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, I., Interscience Publishers, Inc., New York 1953.

⁶ G. W. Sutton u. A. Sherman, Engineering Magnetohydrodynamics, McGraw-Hill Book Co., New York 1965.

¹ K. Robert, Z. Naturforsch. **27a**, 500 [1972].

² K. Schreitmüller, DLR-FB 70-17 [1970].

³ K. Robert, DLR-FB 73-45 [1973].

⁴ H. Hasimoto u. G. S. Janowitz, Phys. Fluids **8**, 2234 [1965].